Matematika stavebního spoření

Výpočet salda ve stacionárním stavu a SKLV

Petr Kielar

Stavební spořitelny se od klasických bank odlišují tím, že úvěry ze stavebního spoření poskytují zásadně z primárních zdrojů - tedy z vkladů účastníků stavebního spoření. Díky tomu jsou stavební spořitelny do velké míry nezávislé na peněžním trhu a mohou svým klientům garantovat fixní úrokové sazby. Nutným předpokladem je ovšem dostatek primárních zdrojů.

Základní úlohou matematiky stavebního spoření je zajistit tyto primární zdroje, tedy zajistit vhodný poměr mezi objemem vkladů V_t a úvěrů U_t v každém čaxe t. V zásadě platí, že je nutné udržet fond stavebního spoření nezáporný. Přitom fond stavebního spoření (FSS) definujeme jako rozdíl mezi objemem vkladů a úvěrů:

$$FSS_t \equiv V_t - U_t \geq 0. \qquad (1)$$

Nahlíženo z jiného úhlu, můžeme si jako cíl stanovit udržení vhodného poměru U_t / V_t. Velikost tohoto poměru závisí na rozhodnutí stavební spořitelny, pro stanovení této hodnoty neexistuje žádné jednoduché pravidlo. Obecně se však má za to, že je vhodné udržet tento poměr pod hodnotou 0,8.

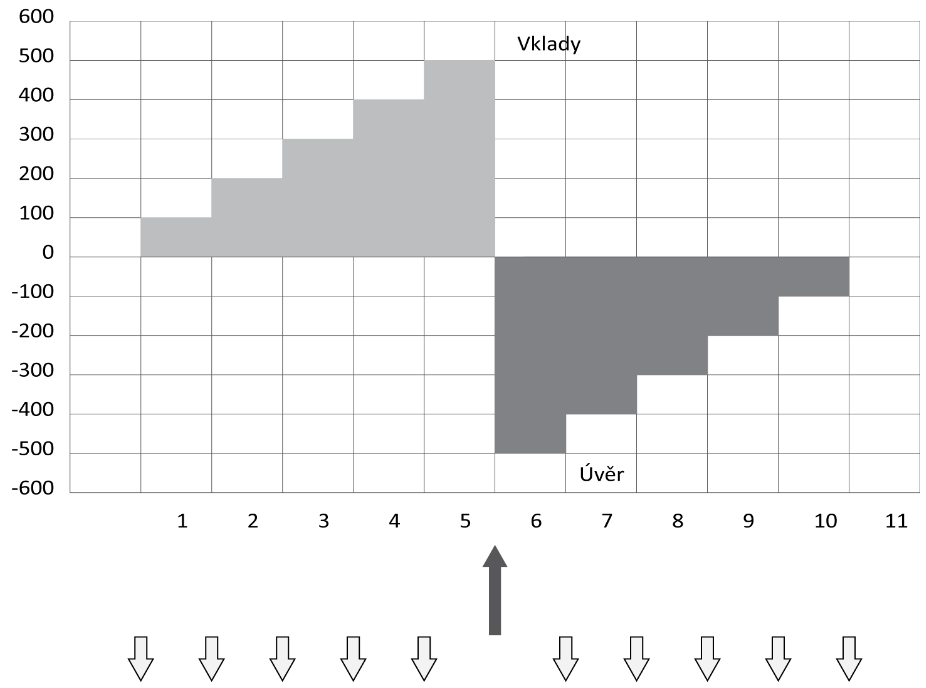
Důležitá poznámka: pod pojmem úvěr budeme v tomto textu rozumět pouze úvěry ze stavebního spoření, nikoli úvěry překlenovací.

1. Jednoduchý model

Jednou z nejjednodušších technik pro získání představy o budoucím vývoji kolektivu účastníků stavebního spoření je modelování pomocí tabulky.

Řekněme že si založíme stavební spořitelnu a budeme požadovat, aby každý účastník s cílovou částkou 1000 zlatých vložil každý rok 100 zlatých, a to po dobu 5 let. Abychom si to zjednodušili, nebudeme vklady ani úvěry úročit, takže na konci pátého roku bude mít takový účastník naspořeno 500 zlatých které si vybere a navíc mu dáme úvěr ve výši dalších 500 zlatých. Na počátku šestého roku si tedy odnese celou cílovou částku ve výši 1000 zlatých. Z toho polovinu tvoří úvěr, který bude splácet opět stovkou zlatých každý rok. Dokonce budeme ke svým klientům tak velkorysí, že první splátku budeme požadovat až na začátku sedmého roku[1], takže poslední splátka bude zaplacena na počátku jedenáctého roku. Celý průběh je znázorněn na obrázku 1.

1 Ve skutečnosti to neděláme proto aby měli klienti lepší podmínky ale proto, aby nám to hezky vycházelo v grafech.



Obr. 1 Průběh spoření jednoho klienta v modelovém tarifu. Účastník nejprve na počátku každého roku vloží 100 zlatých. Na konci pátého roku má uspořeno 500 zlatých. Na počátku šestého roku je my vyplaceno uspořených 500 zlatých společně s úvěrem ve stejné výši. Počínaje sedmým rokem tento úvěr splácí ročními splátkami opět po 100 zlatých.

V horní (hlavní) části grafu je vývoj naspořené částky ve fázi spoření a následně i vývoj úvěru v úvěrové fázi. Ve spodní části jsou šipkami znázorněny peněžní toky (šipky směřující dolů označují částky které klient platí, šipka nahoru je naopak částka kterou klient přijímá).

Na počátku prvního až pátého roku klient vkládá 100 zlatých, na počátku šestého roku čerpá cílovou částku ve výši 1000 zlatých (z toho polovinu tvoří uspořená částka a polovina je úvěr) a na počátku šestého až jedenáctého roku splácí úvěr po 100 zlatých ročně.

Předpokládejme nyní, že každý rok získáme jednoho nového účastníka. Přirozeně nás nyní bude zajímat, jak se bude vyvíjet objem vkladů a úvěrů. Celkové saldo vkladů můžeme určit pomocí následující tabulky:

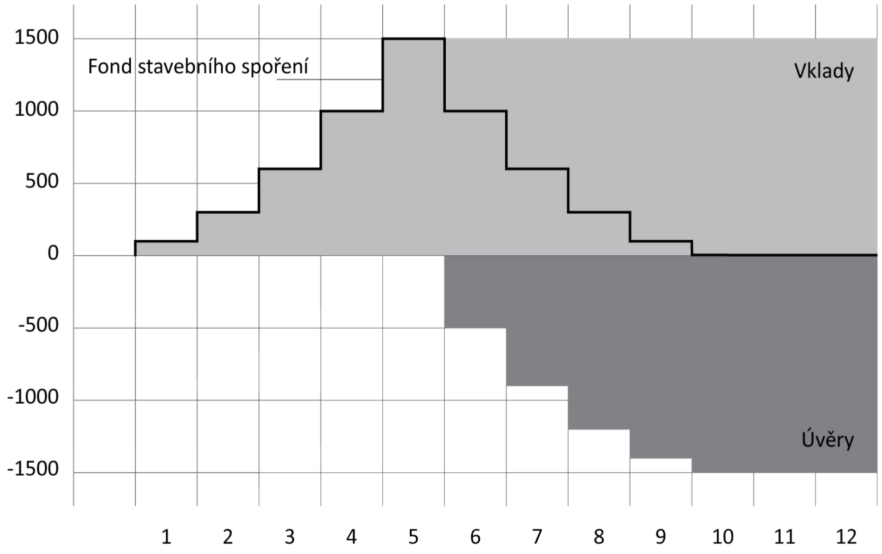
Tab. 1 Výpočet salda vkladů

Rok	1. účastník	2. účastník	3. účastník	4. účastník	5. účastník	6. účastník	7. účastník	...atd.	Celkem
1	100								100
2	200	100							300
3	300	200	100						600
4	400	300	200	100					1000
5	500	400	300	200	100				1500
6		500	400	300	200	100			1500
7			500	400	300	200	atd.		1500
8				500	400	300	...		1500
9					500	400	...		atd.

Stojí za povšimnutí , že počínaje pátým rokem zůstává celkový objem vkladů konstantní (1500 zlatých), a dále se již nemění (samozřejmě za předpokladu, že nepřestanou přicházet noví klienti). Tato vlastnost platí obecně: má-li kolektiv účastníků stálý (neměnný) přísun nových účastníků, ustálí se celý kolektiv ve *stacionárním stavu*, kdy zůstává konstantní nejen celková naspořená částka, ale také další ukazatele (například celkový počet účastníků). Doba, po které se tento stav ustálí je dána délkou fáze spoření, která je v našem případě pětiletá.

Analogickým způsobem bychom mohli zjistit, jak se vyvíjí objem úvěrů.

Nejdůležitějším výstupem z tohoto výpočtu je přirozeně celkový objem vkladů a úvěrů v jednotlivých letech, který je v tabulkách ve sloupci zcela vpravo.
Na následujícím grafu se můžeme podívat na porovnání sald vkladů a úvěrů jakož i na vývoj hodnoty fondu stavebního spoření.



Obr. 2 Vývoj salda vkladů a úvěrů v modelovém příkladu. Po pěti letech se ustálí objem vkladů na hodnotě 1500 a po dalších pěti letech dosáhne své ustálené hodnoty -1500 také saldo úvěrů. Počínaje desátým rokem se ustálí stacionární stav, ve kterém je fond stavebního spoření nulový. Objem vkladů přesně postačuje jako zdroj pro poskytování úvěrů.

2. Podmínka rovnováhy

Kalkulace pomocí tabulek je jednoduchá a názorná, pro řešení určitých úloh však není postačující. Ukážeme si nyní obecný matematický aparát, který umožňuje vytvářet obecnější analýzy.

Za stabilní budeme považovat takovou stavební spořitelnu u které bude zajištěno, že její fond stavebního spoření je nezáporný v libovolném čase t, tedy

$$V_t \geq U_t \tag{2}$$

Nechť se všichni účastníci stavebního spoření chovají ve fázi spoření stejně. Délku fáze spoření označme p, naspořenou částku v i-tém roce označíme v_i, kde i = 1, 2, ... p.

Pokud v každém roce uzavře smlouvu o stavebním spoření stejný počet účastníků n, pak v prvním roce bude celkový objem všech vkladů

$$V_1 = n v_1 . \tag{3}$$

Ve druhém roce budou mít tito účastníci na účtech v_2 peněžních jednotek, a k nim přibude n nových kteří budou mít uspořeno v_1. Objem vkladů ve druhém roce tedy bude

$$V_2 = n v_1 + n v_2 . \tag{4}$$

Počínaje rokem p se celkový objem vkladů ustálí na hodnotě

$$V = n(v_1+v_2+...+v_p) = n\sum_{i=1}^{p} v_i \qquad (5)$$

a počet účastníků ve fázi spoření N^V bude rovněž konstantní:

$$N^V = n\,p. \qquad (6)$$

2.1. Definujeme spořicí výkon

Rovnice (5) udává celkový objem vkladů ve stacionárním stavu, ukážeme si však, že ji můžeme převést do vhodnějšího tvaru. Pravou stranu vynásobíme zlomkem τ / τ, kde τ je délka časového intervalu (v našem případě jeden rok)

$$V = = \frac{n}{\tau}\tau\sum_{i=1}^{p} v_i. \qquad (7)$$

Zavedeme *spořicí výkon* P^V, jako

$$\boxed{P^V = \tau\sum_{i=1}^{p} v_i} \qquad (8)$$

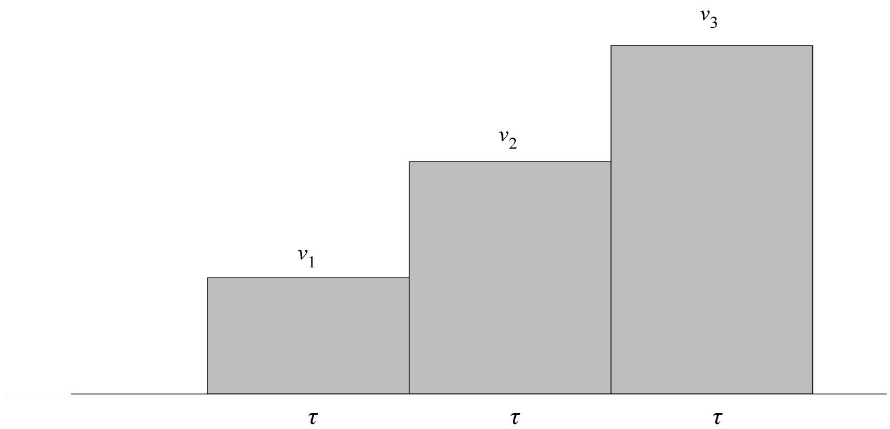
a počet nových smluv za jednotku času

$$\rho = \frac{n}{\tau}, \qquad (9)$$

takže pak můžeme rovnici (5) psát ve tvaru

$$V = \rho P^V. \qquad (10)$$

Jaká je interpretace spořicího výkonu? Dle definice (8) má spořicí výkon význam plochy vymezené v grafu zůstatkem na účtu a osou x. Tuto plochu tvoří obdélníky o stejné šířce τ, jejichž výšky jsou v_i. Součet jejich ploch $\tau\, v_i$ je spořicí výkon P^V.



Obr. 3 Plocha pod křivkou znázorňující zůstatek na účtu se skládá z obdélníků o stejné šířce τ. Výšky jednotlivých obdélníků jsou v_i.

Jednotkou spořicího výkonu je Kč×rok (obecně měnová jednotka × čas). Počet nových smluv za jednotku času ρ definovaný vztahem (9) má jednotku 1/rok.

Celkový objem vkladů ve stacionárním stavu je tedy dán součinem počtu nových smluv za jednotku času a spořicího výkonu. Z (10) tedy vyplývá, že celkový objem vkladů V nezávisí přímo na průběhu spoření (tedy na jednotlivých hodnotách v_i), ale pouze na spořicím výkonu P^V (tj. fakticky na součtu všech hodnot v_i).

2.2. Úvěrový výkon

Podobně odvodíme celkový objem úvěrů U. Předpokládejme, že v každém roce přibude n nových účastníků a po p letech n^U z nich čerpá úvěr. Jako n^V označíme počet účastníků který systém opustí aniž by čerpali úvěr. Tedy

$$n = n^V + n^U . \tag{11}$$

Účastníky, kteří nečerpají úvěr, označujeme jako *přátelské*.
Analogicky vztahu (9) můžeme zavést $\rho^V = n^V / \tau$ a $\rho^U = n^U / \tau$, takže

$$\rho = \rho^V + \rho^U . \tag{12}$$

Analogicky vztahu (12) zavedeme *úvěrový výkon* P^U

$$P^U = \tau \sum_{i=1}^{s} u_i , \tag{13}$$

takže celkový objem úvěrů ve stacionárním stavu bude

$$U = \rho^U P^U . \tag{14}$$

Dosazením (10) a (14) do podmínky (2) dostaneme

$$\frac{P^V}{P^U} \geq \frac{\rho^U}{\rho} . \tag{15}$$

2.3. Cizí slovo *SKLV*

Zlomek na pravé straně nerovnosti (15) je relativní podíl účastníků, kteří budou čerpat úvěr. Na levé straně je podíl výkonů, který je určován způsobem spoření a splácení úvěru a který budeme označovat jako $SKLV$[1]

$$SKLV \equiv \frac{P^V}{P^U} . \tag{16}$$

Podmínku (2) tedy dostáváme ve tvaru

$$SKLV \geq \frac{\rho^U}{\rho} , \tag{17}$$

nebo s využitím (12)

1 Zkratka pochází z německého *Sparer-Kassen-Leistungsverhältnis*.

$$SKLV \geq 1 - \frac{\rho^V}{\rho}. \qquad (18)$$

Z podmínky (18) si můžeme odvodit, jakou hodnotu $SKLV$ musí mít tarif, aby byla zajištěna rovnováha mezi vklady a úvěry. Hodnota $SKLV$ přitom závisí na podílu přátelských účastníků ρ^V/ρ. Čím více je přátelských účastníků, tím může být hodnota $SKLV$ nižší.

2.4. Další využití $SKLV$

Ukázali jsme si, že vztah (18) nám dává podmínku kterou musí každý tarif splňovat. S využitím (10) a (14) můžeme psát

$$\frac{V}{U} = \frac{\rho}{\rho^U}\frac{P^V}{P^U} = \frac{\rho}{\rho^U} SKLV. \qquad (19)$$

Pomocí SKLV tedy podílu účastníku kteří čerpají úvěr tedy můžeme spočítat pomět mezi vklady a úvěry V/U.

2.5. Poznámky k předpokladům odvození

Podmínka (17) je ekvivalentní základní podmínce (2), která požaduje, aby objem úvěrů nepřevýšil objem vkladů. Při odvození jsme však učinili řadu zjednodušení:

- v každém časovém období přibude stejný počet nových účastníků n (počet nových smluv za jednotku času ρ je konstantní)
- všichni účastníci se chovají ve fázi spoření stejně (průběh spoření je popsán řadou v_i),
- určitá (neměnná) část účastníků čerpá úvěr, průběh splácení úvěru je pro tyto účastníky stejný (popsaný řadou u_i).

2.6. Vztah mezi výkonem a úroky

Dosud jsme předpokládali, se stavy účtů klientů mění pouze jednou ročně. Reálně však dochází ke změnám každý den. Pokud bychom potřebovali jít do takového detailu, museli bychom zvolit τ=1/365 a definice spořicího výkonu by vypadala takto:

$$P^V = \frac{1}{365}\sum_{i=1}^{p} v_i, \qquad (20)$$

kde v_i v tomto případě znamenají hodnoty zůstatku na účtu stavebního spoření v jednotlivých dnech. Podívejme se však, zda bychom neuměli výkon spočítat jinak - aniž bychom zdlouhavě sčítali řadu v_i.

Předpokládejme, že máme spořicí účet, u kterého známe výši zůstatku z_i v každém časovém okamžiku i. Nezáleží příliš na tom, jak dlouhý časový interval si zvolíme, jeho délku označíme τ. Může to být den, měsíc či rok, ale i dekáda. Předpokládejme dále, že tento účet je úročen úrokovou sazbou q. Úrok za jedno období (délky τ) vypočítáme jako součin zůstatku, úrokové sazby a délky období. Úrok za i-té období tedy bude $z_i\, q\, \tau$. A celkový úrok r, který získáme za p období bude jednoduchým součtem takových součinů:

$$r = \sum_{i=1}^{p} z_i q \tau = q \tau \sum_{i=1}^{p} z_i \, . \qquad (21)$$

Suma zůstatků násobená délkou období je však výkon P, tak jak jsme jej definovali v (8) respektive (13). Úroky totiž nejsou nic jiného, než výkon vynásobený úrokovou sazbou:

$$r = q\, P \, . \qquad (22)$$

Nyní nerozlišujeme, zda jde o výkon spořicí nebo úvěrový, tento vztah platí univerzálně. Tedy:

$$P = r / q \, . \qquad (23)$$

Výkon tedy můžeme snadno zjistit, pokud známe úroky na příslušném účtu (platí jak pro spořicí, tak i pro úvěrový účet!).

3. Nězabudka

- Pro finanční řízení stavební spořitelny je klíčovou úlohou udržet objem vkladů klientů vyšší než objem poskytnutých úvěrů.
- Při stabilním chování klientů a stabilním přísunu nových klientů se po určitém čase ustálí *stacionární stav*, ve kterém je počet klientů, celkový objem vkladů i úvěrů konstantní (nemění se v čase).
- *Spořicí výkon* je plocha vymezená křivkou naspořené částky a časovou osou (integrál vkladů). Analogicky *úvěrový výkon* (8, 13).
- Úroky (vkladové i úvěrové) jsou přímo úměrné výkonu. Úrok je fakticky odměna za výkon. Proto můžeme výkon snadno vypočítat z úroku (23).
- $SKLV$ je podíl spořicího a úvěrového výkonu účastníka (16).
- *Přátelský účastník* je ten, který přináší spořicí výkon a nečerpá výkon úvěrový.
- **Pro zajištění rovnováhy ($V \geq U$) je rozhodující hodnota $SKLV$ a podíl přátelských účastníků (18).**